EQUAZIONI DIFFERENZIALI

EQUAZIONI LINEARI DI ORDINE SUPERIORE

- OMOGENEE A COEFF. COSTANTI
  - Si trova una base dello spazio delle soluzioni: Prendiamo un'equazione lineare di ordine k $a_n y^n+\ldots+a_1 y'+a_0 y=0$ e passiamo al polinomio caratteristico $a_n t^n+\ldots+a_2 t^2+a_1 t+a_0$ e troviamone le radici
    - CASO 1: radici reali distinte
      - Una base è $e^{K_1 x}, \ldots, e^{K_n x}$
      - La soluzione generale è $y(x)=c_1 e^{K_1 x}+\ldots+c_n e^{K_n}$
    - CASO 2: radici reali di molteplicità n+1
      - Una base è $e^{K_1 x}, xe^{K_2 x}, \ldots, x^n e^{K_n x}$
      - La soluzione generale è $y(x)=c_1 e^{K_1 x}+\ldots+c_n x^n e^{K_n}$
    - CASO 3: due radici complesse coniugate $a \pm ib$
      - Una base è $e^{ax}\cos(bx)$, $e^{ax}\sin(bx)$
      - La soluzione generale è $y(x)=c_1 e^{ax}\cos(bx)+c_2 e^{ax}\sin(bx)$
      - In caso di radici con molteplicità n la soluzione è questa ma come nel caso 2 si moltiplica per x^K per $k \in \{0,\ldots,n-1\}$
- NON OMOGENEE A COEF. COSTANTI
  - INDOVINARE
    - Sia $a_n y^n(x)+\ldots+a_1 y(x)=b(x)$ (1) un'eq. diff. Cerco la soluzione dell'omogenea, dopodiché cerco una soluzione del tipo $y(x)=\beta(x)$ (2), con β una funzione a coefficienti incogniti. Calcolo fino alla derivata n-esima di (2) e sostitusco ponendo $(1)=(2)^n+\ldots+(2)'+(2)=b(t)$. Ricavo i coefficienti e ottengo la soluzione dell'equazione non omogenea.
      - COS'È $\beta(x)$? Dipende da b(t)
        - ① $b(t)=e^{ax} \Rightarrow y(x)=\lambda e^{ax}$ con λ incognito
        - ② b(t)=polinomio ⇒ y(x)=polinomio completo dello stesso grado a coefficienti incogniti
        - ③ $b(t)=\sin(\alpha x)$ o $\cos(\alpha x) \Rightarrow y(x)=a\sin(\alpha x)+b\cos(\alpha x)$ con a e b incogniti
        - ③' $b(t)=\sin^n(\alpha x)$ o $\cos^n(\alpha x)$ o $\sin^a(\alpha x)\cos^b(\beta x)$ ⇒ si "aggiustano" per rientrare nel caso 3
        - ④ b(t)=somma dei casi precedenti ⇒ somma dei tentativi oppure si risolve un pezzo per volta e poi si sommano le soluzioni
        - ⑤ $b(t)=\text{polinomio}\cdot e^{ax}$ e/o pol.·sin/cos ⇒ $y(x)=(\text{pol. completo dello stesso grado})\cdot e^{ax}$ (oppure sin/cos)
        - ⑥ $b(t)=e^{nx}\cdot\sin(\alpha x)$ o $e^{ax}\cdot\cos(\alpha x)$ o simili ⇒ $y(x)=e^{nx}(a\sin(\alpha x)+b\cos(\alpha x))$
  - METODO DI SOMIGLIANZA
    - Simile al metodo dei tentativi

      METODO DI SOMIGLIANZA (per EQ. DIFF. A C.C.)

      $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(D)u=b$ (N) con $b \in \mathrm{Ker}(D-\mu)^\ell$

      Prop: a) Se $\overbrace{P(\mu)\neq 0}^{\text{CASO NON RISONANTE}}$ allora $\exists!$ soluzione di (N) della forma $u(x)=q(x)e^{\mu x}$ con $gr(q)<\ell$

      b) Se $P(\mu)=0$ allora $\exists!$ soluzione di (N) della forma $x^m q(x)e^{\mu x}$ con $gr(q)<\ell$

      • $u''+9u=xe^{2x}$, $\mu=2$ $P(\lambda)=\lambda^2+9$ $P(2)=13\neq 0$

      Cerco una soluzione $u(x)=(a+bx)e^{2x}$

      $u'(x)=e^{2x}(b+2a+2bx)$

      $u''(x)=e^{2x}(2b+2b+4a+4bx)$

      $u''+9u=e^{2x}(4b+4a+4bx+9a+9bx) \overset{?}{=} xe^{2x}$

      $4a+4b+9a=0$ $13b=1$ $b=\frac{1}{13}$ $a=-\frac{4}{13^2}$

      Attenzione: Nel caso b sia del tipo $q(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, $q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

      (NR) $u''+u'+u=\sin x$ $P(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1$, $\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})$ $\mu=i$, $P(i)=i\neq 0$

      $u(x)=a\cos x+b\sin x$

      $u'(x)=-a\sin x+b\cos x$

      $u''(x)=-a\cos x-b\sin x$ ⊕

      $u''+u'+u=-a\sin x+b\cos x \overset{?}{=} \sin x \Rightarrow a=-1,\ b=0 \Rightarrow u(x)=-\cos x$
  - VARIAZIONE DELLE COSTANTI (PER EQ. DIFF. DEL 2° ORDINE)

    METODO DI VARIAZIONI DELLE COSTANTI (per eq. diff. del II ordine)

    $Lu=u''+a_1(x)u'+a_0(x)u$

    $Lu=b$

    Suppongo di avere w_1, w_2 soluzioni linearmente indipendenti di $Lw=0$

    Cerco una soluzione $u(x)=c_1(x)w_1(x)+c_2(x)w_2(x)$ dove c_1, c_2 funzioni incognite determinabili con una integrazione

    $u'(x)=c_1'(x)w_1(x)+c_2'(x)w_2(x)+c_1w_1'+c_2w_2'$

    $u''(x)=c_1'w_1'+c_2'w_2'+c_1w_1''+c_2w_2''$

    $Lu=b \Leftrightarrow c_1(\underbrace{Lw_1}_{0})+c_2(\underbrace{Lw_2}_{0})+c_1'w_1'+c_2'w_2'=b$

    $$\begin{cases} c_1'w_1+c_2'w_2=0 \\ c_1'w_1'+c_2'w_2'=b \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

    $$\Delta=w_1w_2'-w_1'w_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} w_2' & -w_2 \\ -w_1' & w_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} c_1'=-\frac{1}{\Delta}w_2b \\ c_2'=\frac{1}{\Delta}w_1b \end{cases}$$

    ⇒ ricavo c_1 e c_2 mediante integrazione, sono definite a meno di costanti

STUDIO QUALITATIVO

OBIETTIVO: Disegnare tutte le soluzioni

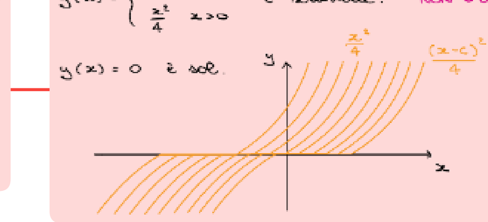
PASSI:
1. Dominio di f
2. Segno di f, zone di monotonia delle soluzioni y(x)
3. Soluzioni costanti, cioè $y \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x,y)=0$ ∀x
4. Simmetrie di f
5. Asintoti orizzontali e verticali (usando sopra/sottosoluz.)
6. Derivate seconde di y(x)

DEFINIZIONI

- EQUAZIONE DIFFERENZIALE
  - È un'equazione la cui incognita è una funzione y(x)
- ORDINE
  - Il più grande ordine di derivazione che vi compare
- IN FORMA NORMALE
  - Si chiama così un'eq. diff. se la derivata di ordine max. è "ricavata" rispetto al resto
  - Esempi e controesempi:
    - $y''=3y'+y^2$ — SI
    - $y''+3y'=7(y+x)^2$
      - NI
      - $y''=-3y'=7(y+x)^2$ — ORA SI
    - $y'^3=7y$
      - NI
      - $y'=\sqrt[3]{(7y)}$ — ORA SI
    - $y'^4=7y$ — NO: NON POSSO RICAVARLA IN MODO UNIVOCO
- AUTONOMA
  - Si chiama così un'eq. diff. in cui la x compare solo come argomento delle y e delle sue derivate
  - Esempi e controesempi:
    - $y'(x)=3y(x)^2$ — SI — $y'=3y$
    - $y'(x)=3y(x)+x^2$ — NO — $y'=3y+x^2$
    - $y'(x)=xy(x)$ — NO — $y'=xy$
- A VARIABILI SEPARABILI
  - Si chiama così un'eq. di ordine 1 della forma $y'=f(x)g(y)$
- LINEARE
  - Si chiama così un eq. diff. di grado k della forma $a_k(x)y^k(x)+\ldots+a_1(x)y'(x)=f(x)$
    - OMOGENEA — se $f(x)\equiv 0$ ∀x
    - NON OMOGENEA — se $f(x)\neq 0$ per almeno un valore di x
    - A COEFFICIENTI COSTANTI — se gli a_i sono numeri
    - A COEFFICIENTE QUALUNQUE — se gli $a_i(x)$ sono funzioni
- PROBLEMA DI CAUCHY
  - È fatto di due "ingredienti"
    - Equazioni differenziali
    - Condizioni iniziali
  - Grazie alle cond. iniziali ci aspettiamo soluzione unica del pb. di Cauchy, ma non sempre è vero: F deve essere abbastanza regolare
    - $$\begin{cases} y'(x)=\sqrt{|y(x)|} \\ y(0)=0 \end{cases}$$
      Esempio: Baffo di Peano

      $y(x)=\begin{cases} -\frac{x^2}{4} & x\le 0 \\ \frac{x^2}{4} & x>0 \end{cases}$ è soluzione. NON C'È UNICITÀ

      $y(x)=0$ è sol.

EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE

- Sono del tipo: $\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$
- con $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$
- ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE
  - Se f è continua in (x,y) e Lip. in y allora esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy
- ESEMPIO
  - $y'(x)=a(x)y(x)+b(x)$ con a,b funzioni continue su $\mathbb{R}$
  - Si può trovare una soluzione generale (siamo nelle ipotesi del teorema)
  - Sia A(x) una primitiva di a(x), cioè $A'(x)=a(x)$, scriviamo l'equat $y'(x)-a(x)y(x)=b(x)$ moltiplichiamo per $e^{-A(x)}$ e otteniamo: $e^{-A(x)}y(x)=\int e^{-A(s)}b(s)\,ds+c$ $c\in\mathbb{R}$, da cui $\boxed{y(x)=ce^{A(x)}+\int e^{A(x)-A(s)}b(s)\,ds}$ al variare di $c\in\mathbb{R}$.
  - In particolare, la soluzione di $\begin{cases} y'=ay+b \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ è: $y(x)=y_0e^{A(x)}+\int_{x_0}^{x}e^{A(x)-A(s)}b(s)\,ds$ con $A(x)=\int_{x_0}^{x}a(s)\,ds$, $A(x_0)=0$.
- SOLUZIONI MASSIMALI
  - Si dice sol. massimale del pb di Cauchy una soluzione $y\in C^1(I)$, $x_0\in I$ e $y(x_0)=y_0$ tale che se $z\in C^1(I)$ è un'altra soluzione ⇒ $I'\subseteq I$
  - Nelle ipotesi di ∃! la soluzione limitata si ha:
    - Caso limitato
      - $b'=b$ o $b'<b$ e $\lim_{x\to b^-} y(x)\in(c,d)$
      - $a'=a$ o $a'<a$ e $\lim_{x\to a^+} y(x)\in(c,d)$
    - Caso retta reale
      - $b'=+\infty$ o $\lim_{x\to b'^-} y(x)=\pm\infty$
      - $a'=+\infty$ o $\lim_{x\to a'^+} y(x)=\pm\infty$
      - Asintoti verticali
- CONFRONTO
  - Teo (Confronto): $y_1, y_2 : I\to\mathbb{R}$ soluzione di $y'=f(x,y)$, I intervallo, con f continua e (loc) lip. in y ⇒ ho 3 possibilità:
    1. $y_1(x)>y_2(x)$ ∀x∈I
    2. $y_1(x)<y_2(x)$ ∀x∈I
    3. $y_1(x)=y_2(x)$ ∀x∈I
- SOPRA E SOTTOSOLUZIONI
  - y è una soprasoluzione (risp. sottosoluzione) di $y'=f(t,y)$ se $y'(s)\ge f(x,y(x))$ ∀x∈I (risp. ≤)
  - La sopra/sottosoluzione si dice stretta se la disuguaglianza è stretta
  - Teo: $y_1, y_2 : I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$; y_1 soprasoluzione di $y'=f(x,y)$, y_2 sottosoluzione di $y'=f(x,y)$ — una delle due stretta
    1. $y_1(x_0)\ge y_2(x_0) \Rightarrow y_1(x)>y_2(x)$ ∀x>x₀, x∈I
    2. $y_1(x_0)\le y_2(x) \Rightarrow y_1(x)<y_2(x)$ ∀x<x₀, x∈I
- ESISTENZA GLOBALE
  - Teo (ESISTENZA GLOBALE): y è sol. massimale di $y'=f(x,y(x))$ con $|f(x,y(x))|\le a(x)+b(x)|y|$ a,b continue e positive ⇒ y è definita globalmente